

Conservazione e Rivoluzione: il Caso della Forza Viva

Fabio Bevilacqua
Dipartimento di Fisica "A. Volta"
Università degli Studi di Pavia
Via Bassi 6; 27100, Pavia, Italia

Introduzione

La "Brevis Demonstratio" di Leibniz ¹ e l'"Erhaltung" di Helmholtz ² sono due tappe rilevanti nella storia del principio di conservazione dell'energia. Nel corso di un secolo e mezzo il panorama scientifico si trasformò profondamente e la storia del principio di conservazione è parte di queste trasformazioni, descritte in tempi recenti in vario modo: come rivoluzioni concettuali per le scienze classiche³, nascita e sviluppo delle scienze baconiane ⁴, interazione tra differenti tradizioni nella meccanica ⁵, matematizzazione delle scienze baconiane ⁶, scoperte simultanee, ⁷ emergere della fisica teorica ⁸.

* Relazione su invito tenuta al Congresso de la Sociedad Española de la Ciencia y Tecnología, Murcia Dicembre 1989. Ricerca effettuata con il contributo del C.N.R.n.

¹ G.W. Leibniz (1686)

² H. Helmholtz (1847)

³ T.Kuhn (1976) p. 41

⁴ T.Kuhn (1976) pp.52-59

J.Heilbron (1979) p.

⁵ I.Grattan-Guinness (1989)

⁶ T.Kuhn (1976) p.61

R.Fox (1974)

E.Frankel (1977)

R.M.Friedmann (1977)

⁷ T.Kuhn (1959)

⁸ R. McCormmach (1971)

C.Jungnickel, R.McCormmach (1986)

Il tema della sessione odierna, la rivoluzione francese ed i cambiamenti nella scienza e nelle istituzioni scientifiche da questa introdotti, è centrale anche per la storia del principio di conservazione dell'energia; due delle tradizioni cui Helmholtz fa riferimento nel primo capitolo dell' "Erhaltung" si sviluppano infatti in Francia in questo periodo; mi riferisco all'interpretazione del teorema delle forze vive nella tradizione della meccanica analitica ed in quella della meccanica applicata alle macchine.

1) Lagrange e la tradizione della meccanica analitica

La prima ha origini antiche ed illustri, la seconda è più recente e più specificamente francese. Esponenti di entrambe le tradizioni saranno attori non secondari nella rivoluzione e di primissimo piano nella fondazione dell'Ecole Polytechnique.

Nella tradizione della meccanica analitica spicca il ruolo di J.L. Lagrange (1736-1813) che, nato a Torino, vive a Berlino dal 1766 al 1787 e poi si trasferisce a Parigi, come "pensionnaire vétéran" dell'Accademia delle Scienze, ove pubblica un'opera fondamentale: la *Mechanique Analytique* ¹⁰.

⁹ Lagrange simpatizza con la rivoluzione, pur senza la passione di Condorcet, Laplace, Monge e Carnot. Nel 1790 è membro della Commissione per la standardizzazione dei pesi e delle misure e dal 1793, dopo l'allontanamento di Lavoisier, Borda, Laplace, Coulomb, Brisson e Delambre ne diviene presidente. Il 25 giugno 1795 viene fondato il Bureau des Longitudes e Lagrange ne diviene subito membro. Dal trenta ottobre partecipa alla breve (tre mesi) esperienza dell'ecole normale de l'An III, ove insegna matematica elementare ed ha Laplace per assistente. Passa poi ad insegnare analisi all'Ecole Polytechnique dalla fondazione nel 1795 fino al 1799, divenendone insieme con Monge uno dei più importanti professori. Nel 1795 viene eletto coordinatore del comitato provvisorio della prima sezione (scienze fisiche e matematiche) dell'Institut National, che rimpiazzava l'Academie. Dal 1799 all'anno della morte ebbe notevoli riconoscimenti politici: senatore, Legion d'onore, conte dell'impero e gran croce dell'ordine imperiale della riunione.

¹⁰Lagrange (1788)

La prima edizione della *Mechanique Analytique* è del 1788 ed è quindi culturalmente antecedente al periodo francese. Essa si inserisce nel progetto di Lagrange di algebrizzare il calcolo e pertanto di eliminarne gli aspetti geometrici e cinematici. In quest'opera Lagrange traccia una storia del principio di conservazione della forza viva, facendolo risalire ai lavori di Huygens ed agli sviluppi di Jean e Daniel Bernoulli e di D'Alembert. Huygens infatti dalle sue esperienze con il pendolo composto aveva determinato una funzione :

$$\sum mv^2 = \sum mu^2$$

(ove v ed u sono le velocità finali di caduta da una determinata posizione nel caso libero e nel caso vincolato), chiamata forza viva, caratteristica di un determinato sistema in una determinata posizione ed indipendente dai vincoli interni del sistema. D. Bernoulli elaborando questo risultato era arrivato ad un'espressione in cui la variazione della forza viva di un sistema che si muove tra due posizioni veniva legata al prodotto di una forza per uno spostamento ¹¹. Lo spostamento non dipende dalla traiettoria percorsa ma solo dalle posizioni iniziali e finali, se il sistema si muove sotto forze centrali newtoniane.

Lagrange esprime poi il principio di conservazione della forza viva in termini analitici¹² molto simili a quelli che saranno utilizzati per la formulazione del principio di conservazione dell'energia meccanica da parte di Helmholtz (1847), e cioè che:

$$T+U= F,$$

ma il significato dei singoli termini e quello complessivo del principio sono completamente differenti. Per Lagrange infatti la quantità che si conserva è la forza viva T di un sistema in una specifica posizione del sistema, indipendentemente

¹¹ D. Bernoulli (1748)

¹² Lagrange (1788) p. 208 e anche p. 272

dalla traiettoria che il sistema ha seguito per arrivare in quella posizione ed indipendentemente dai vincoli del sistema. Pertanto

$$T=F-U.$$

La funzione delle posizioni U che appare nella formula pur avendo le dimensioni di un lavoro non viene identificata come un termine teorico specifico ed autonomo, anche se è da notare che gioca il ruolo di un differenziale esatto. Anche la costante F che è data dalla somma della forza viva e della funzione della posizione non viene interpretata come un termine teorico.

L'argomento viene discusso da Lagrange anche nel 1797 (anno 5) nella *Theorie des Fonctions Analytiques*. Qui ¹³ la conservazione delle forze vive viene considerata valida se i corpi non subiscono altre azioni che quelle che dipendono dai loro vincoli. Più in generale ¹⁴ la forza viva dipende dalle forze attive, cioè dalle forze che i corpi esercitano gli uni sugli altri ed il cui effetto è quello di cambiare le distanze e le posizioni rispettive. Non dipende invece dalle forze passive, quelle esercitate dai vincoli che tendono a mantenere i corpi alle medesime distanze.

Nel 1811, nel primo volume della seconda edizione della *Mechanique Analytique*, Lagrange ribadisce lo stesso approccio (ora la costante è chiamata H) ma si chiede¹⁵ perchè il principio si chiami della conservazione della forza viva: la forza viva infatti non si conserva durante un movimento, ma solo ad una specifica posizione. Lagrange asserisce che il principio si riferisce all'indipendenza della forza viva dai vincoli del sistema, la forza viva dipende invece dalle forze acceleratrici che agiscono sul corpo e che quindi sono le stesse per le stesse posizioni del sistema. La conservazione è una conservazione a specifiche posizioni e non una conservazione durante un processo, come sarà per Helmholtz. Nel secondo volume della seconda edizione (1815) ancora una volta l'espressione analitica della conservazione delle forze

¹³ Lagrange (1797) p. 267

¹⁴ Lagrange (1797) p.270

¹⁵ Lagrange (1811) p.290

vive, pur mantenendo il significato già illustrato, è simile alla successiva ma concettualmente ben diversa conservazione nel senso di Helmholtz.

2) Origini della meccanica applicata alla scuola di Mézières

Anche nell'ambito della meccanica “energetica” già prima della rivoluzione dell'89 abbiamo in Francia degli importanti risultati. Un contributo nel 1702 fu dato da Parent ¹⁶ sull'applicabilità del concetto di forza viva alla scienza delle macchine. Nel 1767 Borda (1733-1799), allievo della École di Mézières nel 1758, applica il principio della conservazione delle forze vive alle ruote idrauliche¹⁷, nella scia di una tradizione che, come vedremo più avanti, risale a D. Bernoulli. Quasi tutti i nuovi risultati sono legati a questa istituzione militare di notevole importanza: l' École du Génie a Mézières ¹⁸, ove fino al 1769 il professore di matematica fu Bossut ¹⁹. In particolare tre sono i nostri personaggi: Gaspard Monge, Lazare Carnot e Charles Augustine Coulomb .

Gaspard Monge (1746-1818), il fondatore della geometria descrittiva, ebbe anche vasti e profondi interessi in matematica, chimica e teoria delle macchine ²⁰.

¹⁶ Parent (1702)

¹⁷ Borda (1767)

¹⁸ R. Taton (1964)

¹⁹ Bossut (1730-1814) per la sua attività a Mézierès e per i rapporti con Monge e Coulomb è un elemento di mediazione tra la tradizione analitica e quella applicata. Gesuita, presenta i suoi primi lavori a Clairaut, Fontenelle e d'Alembert. Nel 1752 a ventidue anni è nominato professore di matematica all'École di Mézières e nel 1768 geometra aggiunto all'Accademia delle scienze. Bossut diede contributi originali alla meccanica dei fluidi e scrisse numerosi libri di testo e trattati. Nel 1798 lo troviamo tra i membri della sezione di matematica dell'Institut e sarà a lungo un esaminatore permanente all'École Polytechnique.

²⁰ Monge insegnò all'École Royale du Génie a Mézières dal 1765 al 1784 (dal 1769 al posto di Bossut e dal 1770 anche come successore dell'abate Nollet in fisica sperimentale) contribuendo fortemente ad incrementare il livello dell'istruzione tecnico scientifica . All' École du Génie ebbe come allievo Lazare Carnot. In questo periodo Monge elabora le proprie idee nel campo della geometria descrittiva, della geometria algebrica e analitica, dell'analisi matematica, idee che poi saranno sviluppate, sistematizzate e pubblicate nei corsi tenuti all'École Polytechnique. Nel 1799 a cura del suo allievo Hachette viene stampata la "*Geometrie Descriptive*" che fu alla base della rapida diffusione di questa disciplina in Francia e all'estero. Le capacità di Monge furono riconosciute: nel 1775 fu nominato “professore reale di matematica e fisica” e nel 1780 fu eletto all'Accademia come geometra aggiunto. Nel corso di idraulica (tenuto in sostituzione di Bossut) ebbe come allievo de Prony. Dal 1783 fu nominato esaminatore dei cadetti di marina. Il suo ruolo come professore e organizzatore dell'istruzione scientifica in Francia durante e dopo la rivoluzione fu senza pari. Dopo la rivoluzione fu membro della Commissione per i pesi

Una caratteristica importante che si evidenzia nell'opera di Monge già prima della rivoluzione è quella della interdisciplinarietà: non solo l'applicazione delle più moderne tecniche analitiche, tra cui le equazioni differenziali alle derivate parziali, in parte dovute a Lagrange²¹, ai problemi geometrici, ma anche una costante attenzione ai problemi delle scienze baconiane e a quelli delle macchine, della cui teoria sarà tra i fondatori. Monge infatti riteneva che il progresso tecnico fosse un fattore chiave per la felicità dell'umanità e che esso dipendesse essenzialmente dall'applicazione razionale della scienza teorica²². Nel settore “baconiano” diede contributi alla teoria del calorico, alla teoria dei toni in acustica, all'elettrostatica ed alla teoria dei miraggi in ottica. Dal 1777 si occupa attivamente di fisica e chimica ed è tra i fondatori degli *Annales de Chimie*; nel 1781 divenne il curatore del *Dictionnaire de Physique* della *Encyclopédie Méthodique*. Nell'83, lavorando sulla base della teoria del flogisto, ottenne la sintesi dell'acqua contemporaneamente ma indipendentemente da Lavoisier. Convertitosi nel 1785 alla nuova chimica ne fu tra i fautori.

I contributi di Monge alla teoria delle macchine furono notevoli: basati sul principio che la funzione di ogni macchina sia quella di trasformare un moto di un dato tipo in un moto di un altro tipo, furono dapprima inclusi nei corsi di geometria descrittiva ma poi raccolti e sviluppati da Hachette nel 1809 nel *Traité élémentaire des machines*. Già nel 1788, quindi ancora in epoca prerivoluzionaria, Monge nel *Traité élémentaire de statique* applica le leggi della statica allo studio dell'equilibrio delle macchine, includendo risultati aggiornati come la teoria delle coppie di Poinsot. Il volume ebbe molte edizioni, la quarta nell'anno IX della Repubblica e la quinta nel

e le misure e Ministro della marina nel 1792-93. Nel 1793-94 fu membro della Commissione per le armi, contribuendo a risolvere il problema del “salpetre” e dei palloni aereostatici militari. Fu particolarmente coinvolto nei progetti di riforma dell'educazione scientifica e tra i fondatori dell'École Polytechnique nel 1795, della quale fu direttore dalla fine del 1797, dopo essere stato tra i docenti della breve esperienza dell'École Normale dell'Anno III nel 1795. Dal 1798 collaborò strettamente con Napoleone, dapprima in Italia e poi nella campagna d'Egitto, dal quale ebbe numerosi incarichi ed onorificenze. Nel 1809 abbandona l'insegnamento all'École Polytechnique ed è sostituito da Arago.

²¹R. Taton () p.476

²² Taton () p.477

1810, rivista da Hachette, con nuove dimostrazioni sulla scomposizione di un sistema di forze arbitrarie.

Un secondo allievo dell'Ecole di Mézières che gioca un ruolo di primo piano nella nostra storia è Lazare Carnot ²³. Nel 1783 egli pubblicò il pionieristico *Essai sur les Machines en Général*, in seguito riconosciuto come il primo testo di ingegneria meccanica e di meccanica applicata alle macchine; nel 1784 per un concorso dell'Accademia di Berlino scrisse le sue *Reflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal*, che furono pubblicate solo nel 1897; infine sempre nel 1784 per un concorso dell'Accademia di Digione scrisse un saggio di strategia e tattica militare, *l'Eloge de Vauban*; questo fu l'unico a dargli una qualche notorietà.

Per i nostri scopi il primo saggio è di gran lunga il più importante. Esso estendeva la parte teorica di una memoria inviata nel 1777, e poi migliorata nel 1780, all'Accademia di Parigi per un concorso sulle macchine semplici e sull'attrito. Il concorso fu vinto da Coulomb, come vedremo, e Carnot ebbe solo una menzione d'onore. Anche l'*Essai* non riscosse particolare attenzione, come pure i *Principes* che ne costituiscono una riedizione nel 1803. Tra il 1783 ed il 1803 le idee di Carnot variarono

²³ Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753-1823) si è conquistato un posto di rilievo sia nella storia politica militare che in quella scientifica. Dopo i due anni di corso alla scuola di Mezieres, durante i quali non sembra aver stabilito particolari rapporti con Monge, Carnot prestò servizio in varie guarnigioni. Nel 1787 ad Arras entrò in contatto con Massimiliano de Robespierre. Ma durante questi anni e fino all'inizio dell'attività politica come deputato all'assemblea legislativa nel 1791 Carnot ebbe interessi prevalentemente scientifici. L'attività politica e militare di L. Carnot fu altrettanto straordinaria di quella scientifica: da deputato nel 1791, divenne esponente repubblicano. Immediatamente dopo l'inizio della guerra nell'aprile del '92 si distinse nell'agosto in una missione militare all'Armata del Reno; ancora nella primavera del 1793 raccoglie uno straordinario successo riorganizzando le armate in Belgio. Nell'agosto del 1793 viene chiamato a far parte dei dodici membri del Comitato di Salute Pubblica. In questa posizione passò indenne attraverso il Terrore, la caduta di Robespierre nel luglio del 1794, la reazione e il Direttorio del 1795, unico dei dodici membri del Comitato. Il contributo politico militare fu tale che in Francia venne definito "l'organizzatore della vittoria". Dal 1795 al 1797 governò, primeggiando sui 4 altri membri del Direttorio, fino al colpo di stato del 4 settembre. Nel 1795 fu tra i promotori dell'Ecole Polytechnique. Fu Carnot a dare nel 1797 a Napoleone il comando dell'Armata d'Italia. Dal 1797 al 1800 Carnot fu in esilio. Nel 1797 pubblica le *Reflexions* ma nel 1800 ritorna a Parigi, dopo la presa del potere da parte di Napoleone che lo nomina ministro della guerra. Carnot però dopo pochi mesi si dimette e si dedica alla ricerca scientifica (dal 1796 era stato eletto membro dell'Institut), e pubblica nel 1801 *De la Corrélation des Figures de Géométrie*, nel 1803 la *Géométrie de Position* e la seconda edizione dell'*Essai* dal titolo *Principes Fondamentaux de l'Equilibre et du Mouvement*. Carnot rimase fedele a Napoleone, ritornò in politica nei drammatici eventi del 1815 e fu l'ultimo suo ministro dell'interno. Questo gli costò l'esilio: passò il resto della vita a Magdeburgo col figlio più giovane, Hippolyte, lasciando invece a Parigi il primo figlio, Sadi, che aveva terminato l'Ecole Polytechnique nel 1814 e che avrebbe dato un contributo enorme allo sviluppo della termodinamica.

poco: l'influenza su di lui della *Mechanique* di Lagrange fu praticamente nulla. Solo a partire dagli anni '20 si comprese che L. Carnot aveva fondato una nuova disciplina: la meccanica applicata alle macchine.

Carnot non tende ad una meccanica delle forze ma ad una meccanica della trasmissione del movimento. Il problema fondamentale di Carnot è quello del massimo rendimento delle macchine. Per ottenere questa condizione Carnot utilizza il principio di conservazione della forza viva, forse ispirandosi all'*Hydrodynamica* di D. Bernoulli del 1738²⁴. In Carnot questo principio riceve un'interpretazione molto diversa da quella della tradizione analitica. Il principio viene visto come una equivalenza tra un primo membro, forza viva, ed un secondo membro, momento d'attività, che è anch'esso interpretato concettualmente. Non siamo più in presenza di una funzione matematica della posizione ma di un prodotto di una forza per uno spostamento. Il primo ed il secondo membro sono sullo stesso piano, infatti il momento d'attività è anche chiamato forza viva latente. Il criterio di massima efficienza è individuato in un principio di continuità: nel funzionamento delle macchine bisogna evitare perdita di forza viva, perché questa corrisponde alla perdita di momento d'attività; ciò si raggiunge se si evitano percussioni e turbolenze, cioè se la trasmissione del moto nelle macchine avviene tra organi che si muovono alla stessa velocità, in condizioni che al limite sono quelle di reversibilità. Il principio della conservazione della forza viva espresso da Carnot contiene quindi anche dei termini che considerano le eventuali perdite di forza viva. Tutto il ragionamento si basa sull'impossibilità che le macchine producano più lavoro di quello fornito, cioè sull'impossibilità del motore perpetuo, anche se non viene espressa esplicitamente anche l'impossibilità di distruggere il lavoro. Il principio di continuità di Carnot perse poi la sua importanza dopo l'affermarsi, a partire dal 1847, del principio di conservazione dell'energia. L'attenzione però portata al “momento d'attività”, che come vedremo non è altro se non il concetto di lavoro, oltre ad essere di grande rilevanza per lo sviluppo dell'ingegneria meccanica, sarà anche importante per

²⁴ C. Gillispie () p. 73

ridare valore concettuale e non solamente analitico all'uguaglianza tra primo e secondo membro nella formulazione del principio di conservazione della forza viva.

Per i rapporti tra le due tradizioni della meccanica in questione sono importanti i riferimenti di Lagrange all'opera di L.Carnot, date le interpretazioni diverse del teorema della forza viva. Nella *Theorie* il caso di cambiamenti bruschi di velocità e la relativa perdita di forza viva vengono trattati nel paragrafo 223 ²⁵ ed il riferimento al teorema di Carnot è nel paragrafo 224 ²⁶. Secondo Kuhn ²⁷, Lagrange uguagliando la variazione delle forze vive con le “aree” ²⁸ date dal prodotto delle forze per gli spostamenti nella direzione delle forze introduce per la prima volta a secondo membro del teorema della conservazione della forza viva una quantità simile al lavoro. Per Kuhn ciò è dovuto all'influenza di Carnot. Senza dubbio Lagrange legge e cita Carnot, ma a mio avviso ciò non è se non l'indicazione di rapporti abbastanza stretti tra due tradizioni di ricerca che Kuhn invece vede come separate. Lagrange infatti si spinge ad affermare, nel volume sulle funzioni analitiche²⁹, che la legge delle forze vive è di grande importanza nella teoria delle macchine e che :

“une chute d'eau, ...; une quantité donnée de charbon,....; une quantité donnée de poudre à canon; une journée de travail d'un animal donné,.. renferment une quantité déterminée de force vive, dont on peut disposer, mais qu'on ne saurait augmenter par aucun moyen mécanique”.

Nella seconda edizione della *Mechanique Analytique* (1811-1815) Lagrange cita il lavoro di L. Carnot ³⁰ ed in particolare il teorema della forza viva applicato ad urti non elastici, in cui ci sono cambiamenti bruschi delle velocità di alcuni corpi. In questi casi Lagrange accetta il teorema di Carnot per cui la forza viva del sistema va diminuita della forza viva perduta nei bruschi cambiamenti di velocità.

²⁵ J.Lagrange (1797) p.271

²⁶ J.Lagrange (1797) p.273

²⁷ T.Kuhn (1959) p.86

²⁸ J.Lagrange (1797) p. 274

²⁹ J.Lagrange (1797) p.

³⁰ J.Lagrange (1811) p. 292

L'esempio dell'attenzione portato da Lagrange al lavoro di Carnot è senza dubbio importante, perché come vedremo il concetto di potenziale e di differenziale esatto che si sviluppano dalla tradizione analitica verranno collegati a quello di lavoro. Non è però da ritenere, come fa Kuhn, che le citazioni di Carnot fatte da Lagrange siano all'origine di questo collegamento. L'interesse in meccanica teorica per i problemi del lavoro si può far risalire a Leibniz, come mostra Cassirer, che considera Leibniz il pioniere dell'uso di questo concetto come metro di misura di tutti i fenomeni naturali: un metro invariante, data l'accettazione della impossibilità di creare lavoro dal nulla ³¹.

Il collegamento tra teorema della vis viva, “lavoro” e macchine pur se in forma embrionale è presente nella maggior parte degli esperti della tradizione analitica. Gillespie nota ³² che, abbandonate le dispute metafisiche, il principio della forza viva rimase un capitolo della meccanica celeste e dell'idrodinamica. In particolare dall'*Hydrodynamica* di D. Bernoulli in avanti il principio venne utilizzato nella soluzione di problemi di ingegneria e dagli studi di idrodinamica Lazare e Sadi vennero influenzati. Anche Kuhn ³³ cita il famoso brano di D. Bernoulli che mostra interesse per il problema del lavoro meccanico:

“Sono persuaso che se tutta la vis viva nascosta in un piede cubo di carbone fosse sviluppata e utilmente applicata al moto di una macchina, si potrebbe ottenere un effetto superiore al lavoro giornaliero di otto o dieci uomini”.

Ma è Grattan Guinness ³⁴ che indica più esattamente le radici della tradizione energetica in quella analitica, a partire dal dibattito settecentesco sul principio dei lavori virtuali (D'Alembert, Lagrange) ³⁵, alla “quantità d'azione” di Eulero e alla sua valutazione dell’“effetto” nelle macchine idrauliche, all'uso delle pompe per sollevare l'acqua, al premio dell'Academie vinto da Eulero nel 1753 per una memoria

³¹ E.Cassirer (1986) pp.221-238; (1953) vol.2, pp.194-195; (1973) pp.252-273

³² Gillespie () p. 73.

³³ T.Kuhn (1959) p. 91.

³⁴ I Grattan-Guinness (1984) pp.3-6

³⁵ vedi anche: E.Hiebert (1959) p.393

sulla propulsione delle navi “senza vento”. Anche D. Bernoulli partecipò e vinse un premio sullo stesso argomento con una memoria la cui prima parte è un trattato di ergonomia. D. Bernoulli aveva già discusso del cuore come di una macchina idraulica nel 1737 e aveva dedicato nel 1738 una parte dell' *Hydrodynamica* alla discussione delle applicazioni della conservazione delle forze vive, argomento anche di una memoria del 1750.

Ritornando alla scuola di Mézières, notiamo che Coulomb (1736-1806) è un altro personaggio che, come Monge, riesce a spaziare in domini del sapere fino ad allora separati ed a dare contributi fortemente innovativi. Anche Coulomb è esperto in moderne tecniche matematiche, come ingegnere è particolarmente attento alle problematiche tecnologiche ed allo sviluppo delle macchine ed è fortemente interessato alle scienze baconiane: a differenza di Monge è proprio in questo campo che darà il suo maggiore contributo ³⁶.

Nel 1781 pubblica una *Théorie des Machines Simples* con delle ricerche fondamentali sul problema dell'attrito e guadagna un doppio premio dell'Accademia e finalmente un posto come “meccanico” aggiunto. Nella memoria “Observations théorique et expérimentelles sur l'effet des moulins a vent, et sur la figure de leurs ailes” ³⁷ Coulomb utilizza il principio delle forze vive asserendo che l'effetto di una

³⁶ Coulomb entrò alla scuola di Mézières nel febbraio del 60 e vi restò fino al novembre del 61, diventando amico di Borda e del professore di matematica Bossut. Dal 1761 al 1881 Coulomb prestò servizio nel corpo del genio in sette differenti località e diresse la costruzione di numerosi forti, accompagnando questa attività con riflessioni e studi di meccanica applicata e di fisica, in particolare sull'attrito, sull'elettricità e sul magnetismo. Nel 1773 dà un esempio della fertilità delle proprie conoscenze interdisciplinari pubblicando una memoria sull'applicazione delle recenti tecniche di calcolo variazionale all'ingegneria. Nel 1774 ha il titolo di corrispondente di Bossut all'Accademia delle Scienze di Parigi e nel 1777 condivide il primo premio dell'accademia per una memoria sulle bussole magnetiche. Si trasferisce quindi a Parigi. Dal 1781 al 1806 presentò venticinque memorie all'Accademia (poi Istituto) e partecipò all'elaborazione di 310 rapporti su argomenti concernenti macchine, canali, strumenti e progetti di ingegneria. Coulomb non partecipò attivamente alla rivoluzione come Monge e Carnot. Fu indotto a dimettersi dal corpo del genio nel '91 ma partecipò ai lavori dell'Accademia fino al suo scioglimento nell'agosto del '93. Nel dicembre dello stesso anno fu dimesso dal comitato per la standardizzazione dei pesi e delle misure. Dal '93 al '95 si ritirò in una proprietà lontano da Parigi, ma nel 1795 fu eletto all'Institut nella sezione di “Fisica Sperimentale”, come vedremo una delle grandi novità per la professionalizzazione delle scienze baconiane in Francia. Nel 1799 Coulomb pubblica un trattato di ergonomia e nel 1801 diviene presidente dell'Institut e nel 1802 ispettore generale della pubblica istruzione.

³⁷ C.Coulomb (1781)

macchina libera da urti e da attrito è continuamente proporzionale alla quantità di forza viva che sia stata ceduta dall'agente che ha provocato l'effetto.

Coulomb si inserisce quindi a pieno titolo tra i precursori della meccanica applicata alle macchine; anch'egli testimonia delle strette relazioni tra i due filoni della meccanica perché, esperto in tecniche analitiche, fu tra i primi a utilizzare il calcolo variazionale in problemi di ingegneria ³⁸. Nel trattato di ergonomia del 1799 Coulomb studia il rapporto tra lavoro utile e affaticamento nell'opera svolta dagli animali e dagli uomini, cercando le condizioni per massimizzare l'effetto utile. Coulomb propose anche una unità di misura per la “quantità d'azione”: quella corrispondente al lavoro necessario per sollevare di un metro un metro cubo d'acqua, ossia 1000 chilogrammi. Con questo Coulomb mostrava di aver individuato dei parametri (prodotto scalare di peso per altezza) che saranno poi generalizzati (forza per spostamento) e che individuano il lavoro delle macchine e non l'affaticamento umano (mantenere un peso sollevato implica affaticamento umano ma non lavoro) ³⁹.

È interessante la notazione di Gillmor ⁴⁰ che gli accademici con cui Coulomb aveva lavorato più strettamente in contatto erano geometri, meccanici o astronomi (Bossut, Leroy, Borda, Prony, Laplace). Infatti i maggiori contributi di Coulomb, quelli all'elettricità, saranno innovativi proprio perché affondano le radici nella tradizione meccanica.

Coulomb infatti nel 1784 pubblica un'importante memoria sulla torsione in cui presenta una bilancia basata sulla forza di torsione e sull'elasticità dei fili di metallo che permetteva la misura precisa di forze di piccolissima intensità. Questo strumento gli permise di affrontare in maniera nuova lo studio dell'elettricità e del magnetismo.

³⁸ C. Gillmor () p. 441 e 442.

³⁹ v. Feynman (1963) cap.14-1

⁴⁰ C.Gillmor () p.440

Le ricerche in questo settore erano ancora di tipo prevalentemente qualitativo: a partire dal 1600 dal *De Magnete* di Gilbert in quasi due secoli si erano fatti progressi molto lenti. All'interno di un paradigma concettuale basato sull'azione contigua e sull'esistenza di fluidi imponderabili erano stati identificati i fenomeni di attrazione e repulsione magnetica ed elettrica, l'elettrizzazione per strofinio, la distinzione tra materiali conduttori ed isolanti; famosa a questo proposito la regola del Du Fay (1698-1739), superintendente dei giardini reali di Francia, sostenitore dell'esistenza di due fluidi elettrici: "Per caricare un corpo conduttore questo deve poggiare su di un isolante". Nel 1745 le esperienze legate alle scariche della bottiglia di Leida, cioè a quello che poi sarebbe stato definito come il primo condensatore, misero in luce l'esistenza dell'induzione elettrostatica (azione a distanza), dei circuiti elettrici e quindi posero in discussione le teorie prevalenti. Kuhn e Bachelard danno due interpretazioni differenti del ruolo svolto da questo esperimento nella storia dell'elettricità: per Kuhn⁴¹ esso porterà al paradigma di Franklin (1706-1790) e ad una situazione di scienza normale, per Bachelard⁴² si resterà in una situazione prescientifica fino all'opera di Coulomb.

Coulomb ha indubbiamente un approccio molto diverso da quello degli altri scienziati del settore, anche dei francesi come Du Fay e Nollet: in una serie di sette memorie presentate all'Accademia tra il 1785 ed il 1791 Coulomb estende il paradigma newtoniano dell'azione istantanea a distanza ai due nuovi domini dell'elettricità e del magnetismo. Il programma di ricerca è esplicito: Coulomb si opponeva all'approccio cartesiano dell'azione per contatto tramite la teoria dei vortici, che ancora era in voga nel magnetismo: nel 1746 le memorie che furono premiate per un concorso dell'Accademia furono quelle cartesiane di Eulero, di D. e J. Bernoulli secondo, e di F. Dutour sui vortici magnetici ⁴³.

⁴¹T.Kuhn (1962) p.17; ma vedi anche: T.Kuhn (1976) p.47

⁴²G.Bachelard (1980) p.29

⁴³C.Gillmor () p.444

Coulomb pur mostrando sperimentalmente la validità della legge dell'inverso del quadrato non provò mai la proporzionalità con il prodotto delle cariche elettriche o delle intensità dei poli magnetici. Nella legge, in pratica, egli provò il denominatore ma non il numeratore. Non definì mai, inoltre, l'unità di carica elettrica o di intensità di polo magnetico.

Un'analisi precisa⁴⁴ del lavoro di Coulomb del 1785 mette in luce una serie di problemi metodologici: sembra strano che egli abbia potuto determinare la sua legge dell'inverso del quadrato solamente sulla base delle tre esperienze riportate. Resta comunque validissimo il risultato quantitativo, pur tra successive reinterpretazioni concettuali. Rispetto alle contemporanee ricerche di Priestley e Cavendish quelle di Coulomb hanno il merito di una maggiore chiarezza, intersoggettività dei risultati e utilizzo di un nuovo apparato sperimentale. Nelle successive memorie Coulomb studiò il problema della dispersione delle cariche (nella terza, 1787) e quello della distribuzione delle cariche sui conduttori (nella quinta, 1788, e sesta, 1790). Nella sesta memoria inoltre Coulomb mostrò che la forza elettrica nei pressi di un conduttore è proporzionale alla densità superficiale di elettrizzazione. Queste indagini sperimentali sono rilevanti per il nostro problema della matematizzazione delle scienze baconiane: infatti esse come vedremo fornirono a Poisson i dati su cui edificare la propria teoria matematica dell'elettrostatica nel 1811.

Possiamo pertanto dire che a Parigi negli anni ottanta erano maturati notevoli progressi nel campo della meccanica analitica (Lagrange 1788), della meccanica applicata (L.Carnot 1783, G.Monge 1788) e della fisica sperimentale (Coulomb 1785). Alla rivoluzione toccherà il compito di costruire le strutture per correlare questi risultati, svilupparli e diffonderli.

⁴⁴S.Galdabini,O.Rossi (1988)

3) Esponenti della tradizione analitica e di quella applicata partecipano al processo rivoluzionario ed alla fondazione dell'École Polytechnique.

Nel 1789 inizia in Francia il processo rivoluzionario. Recenti analisi ⁴⁵ mostrano che il ruolo degli scienziati in questo processo fu notevole sotto molteplici aspetti. Infatti già dal 1775 con la nomina di Lavoisier a direttore de l'“Arsenal” si erano sviluppati in Francia un nuovo tipo di organizzazione scientifica e di lavoro interdisciplinare: partecipano ad esempio alle ricerche di Lavoisier sia Monge che Cousin e Laplace. Con quest'ultimo Lavoisier fonda la calorimetria e fornisce col calorimetro a ghiaccio uno strumento per misure quantitative che sarà essenziale per lo sviluppo delle scienze baconiane e la loro successiva matematizzazione. Il *Traité élémentaire de chimie* è del 1789; un'altra indicazione quindi che notevoli successi furono ottenuti prima della rivoluzione.

Anche dal punto di vista tecnico prima della rivoluzione le novità non mancavano: ad esempio nel 1788 Péricier utilizza le macchine a vapore di Watt per fornire l'acqua della Senna agli abitanti di Parigi e quella a doppio effetto per rimpiazzare i mulini della Senna bloccati da un inverno rigido.

Nonostante una certa arretratezza delle strutture, come quella di non avere un proprio laboratorio, nel 1789 è sempre l'Accademia delle Scienze con i suoi 50 membri effettivi al centro della vita scientifica. La scienza è di moda, come testimoniano la popolarità delle ascensioni in mongolfiera, l'interesse, documentato da Nollet, per i fenomeni di elettricità e magnetismo e la pubblicazione di nuove opere come l'*Encyclopedie Méthodique* e les *Annales de Chimie*.

Gli scienziati partecipano ai processi politici: l'astronomo Bailly presiede l'Assemblea Nazionale, che riceve la visita ufficiale dell'Accademia nel luglio del 1789.

⁴⁵ N. Dhombres (1989) v. la bibliografia a p. 180.

Nel 1791, il 14 ottobre, si insedia il Comitato dell'istruzione pubblica, di cui fanno parte Carnot e Condorcet; nello stesso anno Monge, Borda, Condorcet e Lagrange presentano un rapporto all'Accademia sulla scelta di un'unità di misura, l'inizio di un progetto che sarà realizzato in condizioni difficili tra il '92 e il '99 sotto la guida di Delambre.

Il 22 settembre del '92 con la proclamazione della repubblica, segna una rottura, documentata da Biot nel suo *Essai sur l'histoire générale des sciences pendant la Révolution française*. Le attività scientifiche diminuiscono a favore di un coinvolgimento politico che, notevole per Berthollet e Monge, è di primo piano per L. Carnot. Egli infatti entra nell'agosto del '93 al Comitato di salute pubblica instauratosi nell'aprile di quell'anno. Nel corso di avvenimenti politici e militari sempre più importanti viene soppressa l'Accademia delle Scienze e istituito il sistema metrico, mentre perdono la vita Bailly, Condorcet e Lavoisier. Laplace prudentemente abbandona Parigi.

Il Comitato di salute pubblica affida a scienziati, per lo più di simpatie giacobine, incarichi di rilievo: gli scienziati rispondono con entusiasmo, e ottengono successo in campo militare e nella riorganizzazione dell'istruzione pubblica. Alla seduta della convenzione del 3 gennaio 1795 Fourcroy può fare un bilancio trionfale della mobilitazione degli scienziati dell'anno II. Infatti nel 1794-95 vengono fondate le scuole superiori ed in particolare l'École Polytechnique, viene creato il Conservatoire des arts et métiers (10 ottobre 1794) e rifondata l'Accademia con il nome di Institut National, la cui prima riunione è del 1795.

La mobilitazione degli scienziati era cominciata agli inizi del 1794 quando di fronte alla crisi dell'istruzione tradizionale, affidata per lo più a religiosi, ed alla pressione politico-militare si era deciso di sperimentare nuove forme di insegnamento. Il 2 febbraio 1794 viene infatti fondata l'"École des armes". I migliori scienziati dell'epoca, Guyton de Morveau, Hassenfratz, Fourcroy, Berthollet, Monge

devono in soli 30 giorni insegnare a dei semplici cittadini come fabbricare polvere da sparo ed armi.

Il successo di questa e altre esperienze (come l'École de Mars) porta a sviluppare les “Grandes Écoles” al di fuori e al di sopra del sistema universitario, giudicato arcaico e poco scientifico. Questa decisione viene presa all'interno della Commissione dei lavori pubblici del Comitato di salute pubblica, e Carnot vi gioca un gran ruolo. Al centro del sistema viene posta l'École Polytechnique (dapprima “École des travaux publics”) i cui corsi “rivoluzionari” per 393 studenti (sui tre anni) iniziano il 21 dicembre 1794; sarà una scuola preliminare necessaria per avere accesso alle scuole specializzate d'applicazione. La grande innovazione è che il concorso di selezione è basato sulla conoscenza della matematica e che nei corsi viene privilegiato l'aspetto teorico: matematica, meccanica, chimica teorica. Fourcroy in un rapporto alla Convenzione afferma ⁴⁶: “L'insegnamento della Scuola dei lavori pubblici, che riunirà le conoscenze necessarie a tutti i tipi di ingegneri, avrà due parti principali: le matematiche e la fisica. Queste due scienze esatte devono fornire delle basi solide agli studi necessari per tutti i generi di costruzioni”.

Una notevole svolta era stata compiuta che, come vedremo, avrà dei grandi risultati. Insegnare matematica sofisticata agli ingegneri era già una novità, ma anche considerare la “nuova” fisica come scienza esatta e proporla agli ingegneri come modello teorico non fu un cambiamento da poco. Il processo di matematizzazione delle scienze baconiane stava iniziando. È rilevante infatti che gli scienziati migliori vengono scelti per insegnare all'École Polytechnique e che essi insegnino le teorie più nuove, che vengono raccolte e diffuse nei libri di testo: Berthollet insegna le affinità chimiche, Lagrange il calcolo delle funzioni, Monge la geometria analitica, Laplace la meccanica celeste.

⁴⁶ N. Dhombres (1989) p. 92.

Questi stessi docenti, avevano fatto dal gennaio al maggio del 1795 la breve esperienza della “École Normale de l'an III”, tentando di dare una preparazione scientifica a millequattrocento allievi che dovevano diventare insegnanti delle primarie e delle secondarie, selezionati su basi territoriali in tutta la Francia. Questa esperienza non ebbe successo: non venne costruito un sistema nazionale di scuole per accogliere questi insegnanti. Oramai con la caduta di Robespierre nel settembre del '94 l'accento è più verso la creazione di un'élite per lo stato borghese che di una rigenerazione della nazione ⁴⁷.

Ed è infatti una nuova figura sociale di insegnante ricercatore quella che si afferma con lo sviluppo delle Écoles e con la riapertura dell'Institut. Una figura professionale con prestigio sociale e possibilità operative che rinnova il dominio del sapere scientifico e tecnico. Il prestigio è tale da consentire a Laplace di divenire Ministro degli Interni nel 1799, dopo la presa del potere da parte di Napoleone.

Di queste possibilità operative viene fatto buon uso: dal '96 al '99 c'è una ripresa delle pubblicazioni scientifiche, che erano diminuite nel '92-'95 e fra queste un ruolo di primo piano hanno i grandi trattati. Laplace pubblica l'*Exposition du Système du Monde* nel 1796 e nel 1799 i primi due volumi della *Mécanique Celeste* che lanciano come vedremo il programma della sua scuola. Lagrange nel 1797 pubblica la *Théorie des Fonctions Analytiques*, Carnot nel '97 le *Reflexions sur la Methaphisique du Calcul Infinitesimal*, Lacroix nel '98 i 4 volumi del *Cours de Mathematiques*, Legendre gli *Éléments de la Théorie des Nombres*; Monge nel 1799 la *Geometrie Descriptive* ⁴⁸.

⁴⁷ N.Dhombres (1989) p. 7

⁴⁸ Può essere utile, alla luce delle grandi trasformazioni avvenute e come premessa a quelle che avverranno, ricordare la struttura de l'Institut nel 1798 e i membri delle prime cinque classi. Nella prima sezione, delle matematiche, troviamo Lagrange, Laplace, Borda, Bossut, Legendre e Delambre, ovvero tutti gli esponenti della tradizione della “meccanica analitica”. È da ricordare che avevamo incontrato Bossut come professore, all'École du genie de Mézieres, di Coulomb, Monge e Carnot e quindi come elemento di congiunzione della tradizione delle scienze classiche con quelle di meccanica applicata e baconiane. Le Arti Meccaniche costituiscono la seconda sezione, ove sono membri Périer, Monge, Berthoud, Leroy, Prony e Bonaparte che prese il posto di L. Carnot andato in esilio. Questa è chiaramente la sezione che raccoglie i padri dell'ingegneria meccanica e della meccanica applicata alle macchine. La terza sezione è dedicata all'Astronomia, con Bony, Lalande, Méchain, Le Monnier, Jaurat, Messier. La quarta, Fisica Sperimentale, rappresenta l'istituzionalizzazione delle scienze baconiane: vi

4) Sviluppi francesi all'inizio dell'Ottocento: l'École Polytechnique e la matematizzazione delle scienze baconiane

Nonostante che in alcuni importanti passaggi esponenti della tradizione analitica si mostrassero consapevoli dell'importanza del lavoro e delle macchine, l'impostazione teorica del principio delle forze vive sarà quella presente nella Meccanica Celeste di Laplace, l'opera in cinque volumi che è alla base del programma di unificazione della fisica della scuola laplaciana, che si riuniva nella Società de l'Arcueil, e che soprattutto tra il 1805 ed il 1815 e cioè nel periodo dell'Impero, dominerà la vita accademica francese. Principali esponenti della scuola furono Berthollet, Biot, Poisson, Gay Lussac, Thenard, Malus. A Laplace e alla sua scuola si deve una sintesi tra la meccanica razionale e le scienze baconiane all'interno di un programma di ricerca che si basa sull'azione a distanza e sui fluidi imponderabili⁴⁹.

Laplace nel primo volume della sua *Mécanique Celeste* del 1799 (an VII) esprime il principio di conservazione delle forze vive in forma analitica:

$$\sum mv^2 = C + 2\phi$$

Anche per Laplace dunque l'accento è sul primo membro, la costante c non ha significato fisico e la funzione delle posizioni ϕ , presente perchè il prodotto delle forze per gli spostamenti nelle direzioni delle forze è un differenziale esatto, indica la costanza della forza viva del sistema per una data posizione, indipendentemente dalla traiettoria seguita per arrivare a quella posizione. Infatti:

sono rappresentati Rochon, Charles, Coulomb, Cousin, Lefèvre-Gineau e Brisson. La chimica, quinta sezione, annovera Berthollet, Dayeux, Guyton de Morveau, Fourcroy, Vauquelin, Choptal.

Le altre cinque classi sono per la Storia Naturale e Mineralogica, Botanica e Fisica Vegetale, Anatomia e Zoologia, Medicina e Chirurgia, Economia Rurale e Arte Veterinaria.

⁴⁹R.Fox (1974)

“Le principe dont il s'agit, consiste en ce que la somme des forces vives, ou la force vive totale du systeme, est constante, si le systeme n'est sollicité par aucunes forces; et si les corps sont sollicités par des forces quelconques, la somme des accroissemens de la force vive totale, est la meme, quelles que soient les courbes décrites par chacun de ces corps, pourvu que leurs points de depart et d'arrivée soient les memes”⁵⁰

Evidentemente il principio vale solo nel caso in cui i movimenti dei corpi varino con estrema lentezza. Per dei movimenti bruschi bisogna tener presente le perdite di forza viva secondo le idee di Carnot, che però non viene menzionato.

Il concetto di “lavoro” non viene quindi sviluppato in questo ambito, ma i progressi della teoria matematica del potenziale si affermeranno dapprima con le applicazioni all'elettricità e magnetismo, oramai ricondotti a interazioni newtoniane dall'opera di Coulomb, di Laplace e Poisson, applicazioni essenziali allo sviluppo dell'azione “pseudocontigua” (equazioni differenziali alle derivate parziali rispetto alle tre componenti spaziali e non alla coordinata temporale)⁵¹, e in seguito con la terminologia di Fourier.

J.B.Fourier (1768-1830) non condivide con Poisson l'appartenenza alla scuola laplaciana, anzi sarà un esponente di una “rivolta antilaplaciana” negli anni 20, ma è un esponente dell'École Polytechnique della prima ora. Dopo aver partecipato come allievo all'esperienza dell'École Normale dell'anno III, notato da Monge nel 1795 è istitutore aggiunto e assistente di Lagrange e Monge all'École Polytechnique ed è quindi pienamente in contatto con entrambe le tradizioni. Nel 1798 fa parte, sempre su sollecitazioni di Monge, dalla spedizione di Napoleone in Egitto dove rimane fino al 1801, per poi assumere un incarico a Grenoble fino al 1814. Dal 1806 è proprio Poisson a succedergli all'École Polytechnique e a rallentare il successo della *Theorie analytique de la chaleur* che, presentata in una prima versione nel 1807, ripresentata nel 1811

⁵⁰ Laplace (1799) vol I, p.52

⁵¹ M. Born (1962) p.154

viene definitivamente pubblicata nel 1822. Fondamentale aspetto di quest'opera è il rifiuto dell'ipotesi del calorico, uno degli imponderabili alla base della teorizzazione della scuola laplaciana. Le equazioni della trasmissione del calore di Fourier furono fra l'altro di stimolo ai lavori di Ohm degli anni 20 ed alla base delle analogie, stabilite da W. Thomson negli anni quaranta, tra l'elettrostatica coulombiana dell'azione a distanza a quella dell'azione a contatto di Faraday. L'opposizione di Poisson non poté impedire l'elezione di Fourier all'Académie nel 1817 e la nomina a segretario perpetuo nel 1822.

S.D. Poisson (1781-1840) è ammesso nel 1798 all'École Polytechnique, ne diventerà “repetiteur” nel 1800, vice professore nel 1802 e infine professore al posto di Fourier, come abbiamo visto, nel 1806. Nel 1811 è per noi rilevante la pubblicazione del suo *Traité de Mécanique* e poi nel 1824 la memoria sulla teoria matematica del potenziale, opera in cui compare la famosa “equazione di Poisson” per l'elettrostatica, espressa tramite la funzione potenziale, funzione che si era originariamente imposta in relazione al concetto di vis viva. La variazione di vis viva è dunque ora uguale alla differenza di potenziale, ma l'interpretazione fisica del potenziale manca ancora in questa tradizione. È sorprendente che nel 1835 Poisson pubblichi, in opposizione a Fourier, una *Theorie Mathématique de la Chaleur* in cui non si offrono nuovi risultati e ancora si ipotizza l'esistenza del calorico, un indice questo dell'isterilirsi del programma laplaciano di fronte a nuovi indirizzi come la teoria meccanica del calore e la conservazione dell'energia.

5) La meccanica applicata alle macchine

Nell'ambito dell'École Polytechnique si realizza anche una sintesi straordinaria tra la tradizione della meccanica analitica e quella della meccanica “energetica”: dall'applicazione della nuova matematica, sviluppata in relazione ai problemi della meccanica analitica, alle tematiche di tipo ingegneristico connesse con l'ottimizzazione nell'uso delle macchine sorge una nuova disciplina, la meccanica

applicata alle macchine. In questo contesto le idee pioneristiche di Lazare Carnot vengono apprezzate e sviluppate. Carnot era stato tra i promotori delle riforme dell'insegnamento che avevano portato alla fondazione dell'École e tra i docenti più influenti dell'École troviamo ai primi dell'Ottocento Monge insieme a Lagrange e Laplace. Monge, come vedremo ebbe un'influenza determinante sull'attività di Hachette e di Dupin.

J. Hachette (1769-1834) anch'egli allievo, poi tecnico e infine professore di matematica a Mézières, fervente rivoluzionario e divulgatore della geometria descrittiva di Monge, si impegnò nella preparazione dei tecnici per la rivoluzione e partecipò dagli inizi all'esperienza dell'École Polytechnique come assistente. Dal 1799 al 1816 ne fu professore, curandone dal 1804 il *Journal* e la *Correspondance*. Con la restaurazione perse il posto all'École e nel '23 gli fu negata l'ammissione all'Académie, cui infine giunse solo nel '31, durante il regno di Luigi Filippo. Nel *Programme* del 1808 e nel *Traité élémentaire des machines* del 1811 (che ebbe una 4ª edizione nel '28) Hachette sviluppò le idee di Monge sull'applicazione della geometria descrittiva alla costruzione delle parti fondamentali delle macchine⁵².

Ad Hachette era chiaro il collegamento tra forze vive ed “effetti dinamici” (lavoro), concezione che si ritrova anche in A.T. Petit ⁵³ (1791-1820) che tenne il corso di Hachette nel 1816-17 per essere poi sostituito da Arago. Petit da seguace di Laplace nel 1815 passa ad accettare la teoria ondulatoria di Fresnel e quindi partecipa alla “rivolta antilaplaciana”.

Un altro allievo di Monge è C. Dupin (1784-1873), laureatosi all'École Polytechnique nel 1803, dal 1819 al 1854 professore al Conservatoire des arts et métiers, poi nel '28 deputato e nel 1834 Ministro della Marina. Nel 1825 pubblica i tre volumi della *Géométrie et Méchanique des arts et métiers* particolarmente dedicate al

⁵² R. Taton (), Grattan-Guinness (1984) p. 9-10

⁵³ R. Fox (), Grattan-Guinness (1984) p. 10-11

miglioramento dell'educazione tecnico scientifica dei lavoratori ⁵⁴ (vedi ad esempio la dedica nel primo volume “agli operai francesi” del “vostro amico C. Dupin”) e l'elenco dei corsi tenuti nel 1825, a imitazione di quello del Conservatoire, nelle varie città francesi, elenco inserito all'inizio del terzo volume (1826).

Una figura intermedia tra la meccanica analitica e l'ingegneria meccanica ⁵⁵ é C.Navier (1785-1836). Nel 1813 Navier cura la seconda edizione di un classico: *La Science des Ingénieurs* di Bélidor e nel 1819 una edizione riveduta dell'*Architecture Hydraulique* dello stesso autore. Nel primo di questi lavori emergono le applicazioni dell'analisi menzionate, mentre nel secondo la ricerca di un criterio quantitativo per definire le migliori macchine porta alla definizione della “quantità d'azione”, un termine ripreso dal trattato di ergonomia di Coulomb, che Navier considerò come una forma meccanica di denaro. R. McKeon ⁵⁶ colloca Navier in una posizione intermedia tra Carnot e Coriolis. Nel 1864 Saint Venant pubblicherà la terza edizione del *Résumés des Leçons* di Navier sull’“applicazione della meccanica”. G. Guinness nota ⁵⁷ che Navier pur professando un modello di forze inter-molecolari attrattive e di calorico repulsivo simile a quello di Laplace, invece di analizzare matematicamente le forze intermolecolari le studia con il teorema delle forze vive. Navier evita però di assumere che la “quantità d'azione” assuma un potenziale, cioè egli ipotizza che sia una forma differenziale ma non necessariamente un differenziale esatto.

Ancora, quasi contemporaneo di Navier, un allievo dell'École Polytechnique che dà grandi contributi alla meccanica applicata: J. Poncelet (1788-

⁵⁴ Grattann-Guinness (1984) p. 25-27

⁵⁵ Viene educato infatti nell'ambito della tradizione ingegneristica dal prozio E. Gauthey che lavorava alla direzione del Corps des Ponts et Chaussées a Parigi. Nel 1802 entra all'École Polytechnique ed è tra gli allievi di Fourier. Dopo essersi laureato nel 1804 all'École des Ponts et Chaussées inizia nel 1807 a curare l'edizione dei lavori del prozio. Nel 1819 inizia a insegnare alla stessa scuola i corsi di meccanica applicata e diventa professore nel 1830. Nel 1831 prende il posto di Cauchy all'École Polytechnique, ove ebbe A. Comte come assistente. Dal 1824 fu membro dell'Accademia delle scienze. Navier fu molto impegnato socialmente e politicamente nei movimenti sansimoniani e positivisti. Nel periodo 1807-20 fece dell'analisi uno strumento fondamentale per l'ingegnere e contribuì a codificare il concetto di lavoro nella meccanica applicata.

⁵⁶ R.McKeon () p. 3-4

⁵⁷ Grattann-Guinness (1984) p. 12

1867), che è nel 1807 studente all'École, dove ebbe come professori Monge, Lacroix, Ampère, Poinsot e Hachette ⁵⁸. Dal 1813 al 1824 Poncelet si dedica principalmente alla geometria proiettiva, ma dal '24 in poi diventa un personaggio importante per la reinterpretazione del principio della conservazione della forza viva. Le lezioni dei suoi corsi a Metz furono stampate ripetute volte ed ebbero larghissima diffusione e influenza. Nel 1874-76 si stampa a Parigi l'edizione curata da Kretz. Nella prefazione ⁵⁹ Kretz informa che alla prima sezione, scritta nel 1824, è stata aggiunta l'esposizione del principio delle forze vive nel 1832. Qui fin dalle prime pagine Poncelet usa il termine “travail” ⁶⁰ e lo riferisce al prodotto di un peso per l'altezza di sollevamento del peso stesso. Discute anche rapidamente di tutte le definizioni precedenti ⁶¹ del prodotto in questione e della unità di misura scegliendo infine il kilogrammetro proposto da Navier. Nel confrontare la variazione della forza viva con la quantità di lavoro Poncelet utilizza ancora la definizione di mv^2 per la prima, e la uguaglia quindi al doppio della quantità di lavoro ⁶². Poncelet enuncia il principio di trasmissione del lavoro ⁶³:

$$\sum Qdq - \sum mdv = 0$$

che esprime che:

“Le somme dei lavori elementari sviluppati, tanto dalle forze differenti che producono la modificazione del movimento che dalle forze d'inerzia che nascono da questa modificazione è costantemente uguale a zero”.

Di qui integrando si ha il principio delle forze vive ⁶⁴:

⁵⁸ Nel 1810 entra nel Corpo del Genio, dal 1824 al 1834 insegnerà “meccanica applicata alle macchine” alla École d'Application de l'Artillerie e du Génie a Metz, poi nel 1834 diviene membro della sezione Meccanica dell'Académie.

⁵⁹ J.Poncelet (1874-1876) vol.I, p. VII

⁶⁰ J.Poncelet (1874-1876) vol.I, p. 2

⁶¹ J.Poncelet (1874-1876) vol.I, p. 4

⁶² J.Poncelet (1874-1876) vol.I, p. 13

⁶³ J.Poncelet (1874-1876) vol.I, p. 17

⁶⁴ J.Poncelet (1874-1876) vol.I, p. 19

$$\sum \int_{q_1}^{q_2} Qdq = \sum \int_{v_1}^{v_2} mv dv = \frac{1}{2} \sum (mv_2^2 - mv_1^2)$$

che esprime che:

“Tra due posizioni qualunque e date di un sistema, l'accrescimento della somma delle forze vive di masse differenti è uguale al doppio della somma di quantità di lavoro positive o negative, impresse nello stesso intervallo da tutte le forze distinte dall'inerzia che hanno agito nel sistema”.

Prendendo in considerazione infine le forze motrici destinate a produrre lavoro utile (Fdf); le resistenze passive ($- Rdr$), le resistenze utili che corrispondono al lavoro utilizzato attraverso la macchina ($- Qdq$); il peso degli elementi sollevati ($\pm mgdh$); il lavoro delle forze d'inerzia ($-mv dv$), si avrà l'equazione generale del movimento delle macchine:

$$\sum mv^2 - \sum mv'^2 = 2 \sum \int Fdf - 2 \sum \int Rdr - 2 \sum \int Qdq \pm 2 \sum \int mgdh$$

Poncelet discute poi i vari casi in cui la formula può essere applicata, elencando vantaggi e svantaggi dei moti uniformi e vari delle macchine, della presenza o assenza di attriti e di urti tra le varie parti delle macchine stesse. In una nota storica premessa alla seconda parte ⁶⁵(1876) Poncelet ricorda i contributi al problema dei movimenti dei fluidi reali e le applicazioni del principio delle forze vive fatti da D. Bernoulli, D'Alembert, Borda, De Prony (sulla base dei risultati di Coulomb), Bossut, Dubruat e Navier. Si evidenzia così ancora una volta l'intergioco tra le due tradizioni della meccanica, strettamente legate.

⁶⁵ J.Poncelet (1874-1876) vol.II,p. 2-3

G. Coriolis (1792-1843) è un altro allievo dell'École Polytechnique che dà rilevanti contributi al problema della forza viva e del lavoro ⁶⁶. Nel 1829 Coriolis pubblicò il suo *Du Calcul de l'effet des machines* in cui viene per la prima volta utilizzata la parola “travail” in senso tecnico e per la prima volta la forza viva viene definita come

$$\frac{1}{2}mv^2$$

indice che nel teorema della vis viva-lavoro è il secondo membro che assume l'importanza maggiore; come viene spiegato nell’“avertissement” ⁶⁷. Ivi Coriolis spiega anche la storia delle idee espresse, le influenze di Carnot e le interazioni con Poncelet.

Su questo punto è anche interessante il “Rapport” sul volume in questione fatto all'Accademia da De Prony, Girard e Navier in data 8 giugno 1829 e pubblicato nel libro prima dell’“avertissement”. Qui ancora viene fatta una storia che di nuovo indica gli stretti legami tra i due indirizzi in gioco: essa parte da Parent per passare a D. Bernoulli, Eulero, Borda, De Parcieux, Coulomb, Carnot, Bélidor, Smeaton, Lagrange, Petit, Navier, De Prony.

Nel “Rapport” viene evidenziato il principio di trasmissione del lavoro di Coriolis:

“il lavoro resistente è sempre uguale al lavoro motore, meno la quantità di cui la somma delle forze vive è aumentata nel sistema”;

infatti:

⁶⁶ Studente all'École nel 1808, dal 1816 Coriolis diviene assistente al corso d'analisi (tenuto da Cauchy), nel 1829 diventa professore all'École des Arts et Manufactures dove ha la cattedra di meccanica. Nel 1830 rifiuta il posto lasciato da Cauchy ma nel 1832 è assistente di Navier all'École des Ponts et Chaussées, di cui prende nel 1836 sia il posto di professore che quello di membro dell'Accademia delle Scienze.

⁶⁷ G. Coriolis (1829) p. III

$$\sum \int P ds - \sum \int P' ds' = \frac{1}{2} \sum \left(\frac{p}{g} \right) v^2 - \frac{1}{2} \sum \left(\frac{p}{g} \right) v_0^2$$

per Coriolis il caso importante si realizza quando $v = v_0 = 0$ e quindi quando tutto il lavoro fornito alla macchina viene utilizzato. Infatti se indichiamo con T_m la quantità di lavoro delle forze motrici, con T_r la quantità consumate dalle resistenze esterne e per l'attrito, con T_g quella perduta per attriti interni e con T_c quella perduta per gli urti, nel caso di $v = v_0 = 0$ abbiamo:

$$T_m = T_r + T_g + T_c$$

La forza viva dunque appare come la forma latente del lavoro, il lavoro racchiuso e disponibile in un corpo. Una grande trasformazione era dunque avvenuta rispetto alle affermazioni di Carnot sul lavoro come forza viva latente. È da notare però con Haas ⁶⁸ che Coriolis non perviene ad una concezione dell'indistruttibilità del lavoro, mentre ovviamente accetta la sua non creabilità. Si è pertanto ancora lontani dall'idea di conservazione dell'energia. Possiamo ora sottolineare le differenze tra le due tradizioni: nella tradizione analitica si privilegiava la statica rispetto alla dinamica e nell'espressione del principio-teorema della forza viva veniva privilegiato il primo membro, la forza viva, che si supponeva conservato in determinate posizioni. L'espressione a secondo membro veniva considerata come un differenziale esatto, il prodotto scalare della forza per lo spostamento ammetteva dunque un potenziale.

Nella tradizione applicata la situazione era opposta: la dinamica veniva privilegiata rispetto alla statica e nel teorema delle forze vive veniva privilegiato il secondo membro, identificato concettualmente come lavoro. Tale espressione non era però considerata un differenziale esatto ⁶⁹ e più che di conservazione delle forze vive si parlava di trasmissione del lavoro e delle condizioni di ottimizzazione di questa trasmissione.

⁶⁸ Haas (1909) cap. 8, p. 81

⁶⁹ Grattan-Guinness (1984) p. 32.

6) Le due tradizioni nell'opera di Helmholtz

Nei successivi sviluppi, che qui non prendiamo in esame, il concetto di lavoro fu collegato con quello di potenziale, cioè si cominciò a valutare l'importanza di considerare il lavoro come differenziale esatto e di valutare i rapporti tra potenziale e lavoro. Esponenti di questo nuovo approccio furono Green, Gauss, Hamilton, F. Neumann, R. Clausius, B. Riemann.

Helmholtz conosce entrambe le tradizioni francesi ed anche, seppur non completamente, gli sviluppi della teoria matematica del potenziale, ma si discosta da tutte queste tradizioni. Rimane ora da esaminare brevemente come queste tradizioni abbiano influito sul lavoro del 1847 di Helmholtz. Il fatto che abbiano giocato un ruolo è evidente: il primo capitolo dell'Erhaltung è infatti dedicato alla “conservazione delle forze vive” e questa è interpretata come conservazione delle forze vive in una determinata posizione. Qui i riferimenti alla tradizione analitica sono chiari e vi è una stretta rassomiglianza tra l'esposizione di Helmholtz e quella di Lagrange.

Helmholtz fa ugualmente un chiaro riferimento alla tradizione applicata, usando spesso la parola “arbeit”, con riferimento al nuovo significato acquisito del termine francese “travail”, e utilizzando l'espressione $1/2 mv^2$ per la forza viva, espressione che come abbiamo visto fu proposta nel 1829 da Coriolis. La rilevanza di questa tradizione per il lavoro di Helmholtz era già stata sottolineata nel 1898 da G. Helm⁷⁰ e nel 1909 da H. Haas⁷¹. Recentemente è stata ripresa da Kuhn⁷².

Helmholtz conosce anche, pur se in maniera non approfondita, le tradizioni della teoria matematica del potenziale (i suoi riferimenti sono a Gauss e non a Green). Cerca, con alcune incertezze, di definire i rapporti tra potenziale lavoro e su

⁷⁰ G. Helm (1898) pp.13-15

⁷¹ A.E.Haas (1909) cap.8

⁷² T.Kuhn (1959)

questo punto sarà poi criticato da Clausius, ma comunque interpreta senz'altro il lavoro come un differenziale esatto.

È notevole quindi che quando Helmholtz discute la oramai ben nota espressione della conservazione delle forze vive:

$$\frac{1}{2}mQ^2 - \frac{1}{2}mq^2 = \int_r^R \phi dr$$

ove Q, q sono le velocità nelle posizioni R, r e ϕ sono forze newtoniane, il secondo membro venga definito come “la somma delle forze di tensione”.

Kuhn⁷³ e Lindsay⁷⁴ restano sorpresi. Entrambi asseriscono che Helmholtz non riesce a riconoscere quel termine come “lavoro”. In realtà Helmholtz sta operando una reinterpretazione del secondo membro che sarà della più grande importanza: la somma delle forze di tensione (di lì a poco sarà chiamata variazione dell'energia potenziale) viene correlata alla variazione delle forze vive (di lì a poco variazione dell'energia cinetica) tramite un principio di causa-effetto. Si recupera qui la tradizione leibniziana con il suo rapporto tra vis viva e vis mortua, ove la vis viva era data da “infinite applicazioni della vis mortua”. La variazione della forza viva (energia cinetica) è uguagliata alla somma delle forze di tensione (variazione dell'energia potenziale) e viene proposto il concetto di energia come quantità che si conserva durante un processo.

La reinterpretazione del secondo membro dell'equazione è quindi di grande importanza. Planck asserisce che la novità consiste nel passare da “lavoro fatto” a “lavoro che può essere fatto”⁷⁵. Eppure questa novità, che a mio avviso segna l'emergere della fisica teorica, non fu universalmente accettata. Esponenti di rilievo della tradizione analitica come Clausius, Sturm, Riemann rimasero legati ad una

⁷³ T.Kuhn (1959) p.88: "he fails to identify the integral of Pdp as work"

⁷⁴ R.B. Lindsay (1976) p.14 : "It is curious that Helmholtz did not recognize (the term *work*) "

⁷⁵ M.Planck (1887) p.36-37

concezione fisico matematica del lavoro come differenziale esatto e differenza di potenziale che, pur essendo analiticamente più generale (non ipotizzava la limitazione di forze centrali newtoniana dipendenti dalla sola posizione, ma accettava anche forze dipendenti dalla velocità ed accelerazione e quindi potenziali cinetici e non solo posizionali), mancava però del valore euristico che sarà presto riconosciuto al principio di Helmholtz. Helmholtz pertanto si distacca sia dal principio di conservazione delle forze vive ad una determinata posizione, sia dal principio di trasmissione del lavoro come forma differenziale (non esatta), sia dalla tradizione analitica del lavoro come differenziale esatto.

In definitiva possiamo rilevare come leggi formalmente identiche non abbiano un'unica interpretazione: pur tra molteplici legami il principio di conservazione della forza viva, il principio della trasmissione del lavoro, la concezione analitica del lavoro ed il principio meccanico di conservazione dell'energia ne sono un chiaro esempio.

Bibliografia

G.Bachelard (1980) *La Formation de l'Esprit Scientifique*, 11ma ed.; Paris, Vrin

D.Bernoulli (1738) *Hydrodynamica*, Strasbourg

(1748) "Remarques sur le principe de la conservation des forces vives pris dans un sens général" in *Histoire de l'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin*, Anne 1748, 1750, pp.356-364

J.B.Biot (1803) *Essai sur l'histoire générale des sciences pendant la Révolution française*, Paris

J.C.Borda (1767) "Mémoire sur les roues hydrauliques" in *Mémoire de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, pp.270-287

M.Born (1962) *Einstein's Theory of Relativity*, ediz.riveduta, New York, Dover

E.Cassirer (1953) *Storia della Filosofia Moderna*, Torino, Einaudi (*Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der Neueren Zeit*, Berlin, B.Cassirer)

- (1973) *Sostanza e Funzione*, Firenze, La Nuova Italia (*Substanzbegriff und Funktionsbegriff*, Berlin, 1910, B.Cassirer)
- (1986) *Cartesio e Leibniz*, Bari, Laterza (*Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen*, Marburg 1902, Elwert)
- L.Carnot (1783) *Essai sur les Machines en Général, par un Officier du Corps Royal du Génie*, Dijon
- (1797) *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal*, Paris
- (1801) *De la Correlation des Figures de Géométrie*, Paris
- (1803) *Principes Fondamentaux de l'Equilibre et du Mouvement*, Paris
- (1803) *Géométrie de Position*, Paris
- G.Coriolis (1829) *Du Calcul de l'effet des machines*, Paris
- C.Coulomb (1781) "Observations théorique et expérimentelles sur l'effet des moulins a vent, et sur la figure de leurs ailes" in *Mémoires de l'Académie*, Paris, 1781, pp. 65-81
- (1809) *Théorie des Machines Simples*, Paris
- N. Dhombres (1989) *Les Savants et la Revolution*, Paris
- C.Dupin (1825-1826) *Géometrie et Mécanique des arts et métiers*, 3 voll Paris
- R.Feynman (1963) *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley
- J.B.Fourier (1822) *Theorie analytique de la chaleur*, Paris
- R.Fox (1974) "The Rise and Fall of Laplacian Physics", *Historical Studies in Physical Sciences*, 4, pp.89-136
- () "A.T.Petit" in *Dictionary of Scientific Biography*, v. , pp. 545-546
- E.Frankel (1977) "J.B.Biot and the Mathematisation of Experimental Physics in Napoleonic France", *Historical Studies in Physical Sciences*, 8, pp.33-72
- R.M.Friedmann (1977) "The Creation of a New Science: Joseph Fourier's Analytical Theory of Heat", *Historical Studies in Physical Sciences*, 8, pp. 73-99
- S.Galdabini, O.Rossi (1988) *De' Curiosi Esperimenti*, Pavia, Collana di Storia della Scienza dell'Università
- C.Gillispie () "L.Carnot" in *Dictionary of Scientific Biography*, v. , pp.70-79
- C.Gillmor () "C.Coulomb" in *Dictionary of Scientific Biography*, v. , pp.439-447

- I.Grattan-Guinness (1984) "Work for the Workers: Advances in Engineering Mechanics and Instruction in France, 1800-1830" in *Annals of Science*, 41, pp.1-33
- (1989) "The varieties of mechanics by 1800", paper for the Hegel and Science conference, typescript
- A.E.Haas (1909) *Die Entwicklungsgeschichte Des Satzes Von Der Erhaltung Der Kraft* , Wien, Hölder
- J.Hachette (1811) *Traité Élémentaire des Machines* , Paris
- J.Heilbron (1979) *Electricity in the 17th and 18th Centuries* , California U.P.
- G.Helm (1898) *Die Energetik* , Leipzig, von Veit
- H. v. Helmholtz (1847) *Über die Erhaltung der Kraft* , Berlin, G.Reimer
- E.Hiebert (1959) "Commentary" in M.Clagett (a cura di) *Critical Problems in the History of Science* , Madison, Wisconsin U.P., pp.391-400
- C.Jungnickel,R.McCormmach (1986) *Intellectual Mastery of Nature* , voll.2, Chicago, Chicago U.P.
- T.Kuhn (1959) "Energy Conservation as an Example of Simultaneous Discovery" in M.Clagett (a cura di) *Critical Problems in the History of Science* Madison, Wisconsin U.P., pp. 321-356; reprinted in *The Essential Tension* , pp. 66-104, Chicago, 1977, Chicago U.P.
- (1962) *The Structure of Scientific Revolutions* , Chicago U.P., 2nda ed. 1970
- (1976) "Mathematical versus Experimental Traditions in the Development of Physical Science" in *The Journal of Interdisciplinary History*, 7 , pp.1-31; reprinted in T.Kuhn, *The Essential Tension* , pp.31-65, Chicago, 1977, Chicago U.P.
- S.F.Lacroix (1798) *Cours de Mathematiques* , Paris
- J.L.Lagrange (1788) *Mechanique Analitique* , Paris, Desaint
- (1797) *Theorie des Fonctions Analytiques* , Paris
- (1811-15) *Mechanique Analitique* , 2nda ed., Paris
- P.S.Laplace (1796) *Exposition du Système du Monde* , Paris
- (1799) *Traité de la Mécanique Celeste* , (due primi vol.), Paris
- A.L.Lavoisier (1789) *Traité élémentaire de chimie* ,Paris
- A.M.Legendre (1798) *Éléments de la Théorie des Nombres* , Paris

- G.W.Leibniz (1686) "Brevis Demonstratio Erroris Memorabilis Cartesii et Aliorum Circa Legem Naturalem, Secundum Quam Volunt a Deo Eandem Semper Quantitatem Motus Conservari, Qua et in Re Mechanica Abutuntur" in: *Acta Eruditorum*, Leipzig, in C.I.Gerhard (a cura di): G.W. Leibniz. *Mathematische Schriften* , vol.2, pp. 117-119; Halle 1860, H.W.Schmidt
- R.B.Lindsay (1976) *Applications of Energy* , Stroudsburg, Dowden Hutchinson and Ross
- R.McCormmach (1971) "Editor's Foreward" in *Historical Studies in Physical Sciences* , 3, pp.IX-XXIV
- R.McKeon () "C.Navier" in *Dictionary of Scientific Biography*, v. , pp. 2-5
- G.Monge (1788) *Traité Élémentaire de Statique* , Paris
- (1799) *Geometrie Descriptive* , Paris
- C.Navier (1864) *Résumés des Leçons* , a cura di Saint-Venant, Paris
- M.Planck (1887) *Das Princip de Erhaltung der Energie* , Leipzig, Teubner
- Parent (1702) "Sur la plus grande perfection possible des machines", in *Mémoires de l'Académie*, Parigi, pp. 323-338
- S.D.Poisson (1811) *Traité de Mécanique* , Paris
- (1835) *Theorie Mathématique de la Chaleur* , Paris
- J.Poncelet (1874-1876) *Cours de Mécanique Appliquée aux Machines* , a cura di M.Kretz, due voll., Paris
- M.Sturm (1861) *Cours de Mécanique* , a cura di M.Prohuet, due voll., Paris, Mallet-Bachelier
- R.Taton (1964) "L'école royale du génie de Mézières" in R.Taton (a cura di) *Enseignement et diffusion des sciences en France au XVIII siècle* , Paris, pp.559-615
- () "J.Hachette" in *Dictionary of Scientific Biography*, v. , pp. 1-3
- () "G.Monge" in *Dictionary of Scientific Biography*, v. , pp. 469-478