LA TRATTAZIONE NEI MANUALI DI FISICA

5.1 BECKER R., Teoria della elettricità, vol. I°, pag. 161-165, Sansoni, (1970)

" f 52. - **La legge dell'induzione di Faraday.**

Faraday fece nel 1831 la scoperta fondamentale che in un circuito formato da un filo metallico chiuso, si genera una corrente elettrica quando un magnete che si trovi nelle sue vicinanze venga posto in movimento. Uno studio sperimentale più preciso di questo fenomeno fornì la seguente legge quantitativa per la corrente che si genera in tal caso.
Sia R la resistenza ohmica del circuito metallico, f una superficie da esso limitata e del resto completamente arbitraria. Fissiamo sul circuito un determinato senso di circolazione positivo $d\mathbf{s}$ e quindi sulla superficie una determinata orientazione per la normale $\mathbf{n}$, mediante la regola della vite destrorsa. Consideriamo la corrente J positiva o negativa, secondo che essa circola nel senso di $d\mathbf{s}$ o nel senso contrario. In tal caso, la legge dell'induzione, secondo le scoperte fondamentali di Faraday sulla corrente indotta, si esprime con:

$$J\,R = -\frac{1}{c}\,\frac{d}{d\,t}\iint B_n\,df\ . \qquad (124)$$

Il prodotto della resistenza per l'intensità della corrente è in ogni istante uguale, a meno del segno, alla derivata rispeto al tempo del flusso d'induzione che passa attraverso ad una superficie racchiusa dal circuito, divisa per c.

Per la grandezza $-\frac{1}{c}\,\frac{d}{d\,t}\iint B_n\,df$ la tecnica usa il nome di *impulso magnetico.* E' affatto equivalente che l'impulso si formi perché il circuito in quiete si trovi in un campo variabile col tempo, o perché il circuito si muova in un campo costante. **{5/1}**
[...] Vogliamo ora scrivere la legge dell'induzione (124) in una forma più generale, eliminandone l'intensità di corrente J con l'aiuto della legge di Ohm.
Vogliamo prima di tutto generalizzare ancora l'equazione (124), ammettendo che nel circuito sia presente anche una F.E.M impressa $E^{(e)}$. Anche questa darà origine a una corrente $J = E^{(e)}/R$, di modo che la (124) si dovrà sostituire con la relazione

$$J\,R = E^{(e)} - \frac{1}{c}\,\frac{d}{d\,t}\iint B_n\,df\ . \qquad (124\ a)$$

Applichiamo ora la legge di Ohm nella sua forma differenziale

$$\mathbf{i} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)}\right).$$

L'intensità di corrente in ogni punto è cioè determinata soltanto dall'azione concomitante dell'intensità del campo elettrico e della forza impressa nel punto considerato. Allora (..), integrando su tutto il volume del conduttore lineare si ha:

$$J\,R = E^{(e)} + \oint E_s\,ds\ .$$

Mentre nel campo elettrostatico il secondo addendo era sempre zero, per la irrotazionalità di **E**, un confronto con la (124 a) mostra ora che per una variazione del flusso d'induzione deve essere

$$\oint E_s\, ds = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\int B_n\, df \quad . \qquad (125)$$

La circuitazione del campo elettrico $\oint E_s\, ds$ *è uguale all' impulso magnetico.*

Nell'espressione (125), è completamente sparita dalla legge dell'induzione (124) la costante R relativa al materiale del filo. Questo fatto ci suggerisce una generalizzazione importante, e fondamentale per ciò che segue, della equazione (125), che per ora abbiamo dimostrato solo per un circuito di filo metallico. Questa generalizzazione consiste nell'affermare che per la validità della (125a) la presenza del conduttore è del tutto inessenziale e che anzi la circuitazione del vettore eletrico lungo una qualsiasi curva chiusa arbitraria è data esattamente dalla (125). Questa affermazione è senz'altro esatta nel caso che si scelga come linea d'integrazione una curva giacente non già nel filo stesso, ma nel vuoto, nelle immediate vicinanze di questo. Infatti, a causa della continuità della componente tangenziale di **E**, questa scelta della linea d'integrazione lascia immutato il valore di $\oint E_s\, ds$. Tuttavia, la nuova interpretazione dell'equazione (125) in tutta la sua generalità, è un'ipotesi che va provata mediante una verifica sperimentale delle sue conseguenze.

Tale interpretazione ci permette di giungere ad una forma differenziale della legge dell'induzione. Se infatti la (125) è valida per un qualsiasi elemento di superficie, ne deriva subito mediante applicazione del teorema di Stokes, una relazione differenziale tra i vettori **E** e **B**.

Nei mezzi in quiete il flusso d'induzione (primo membro della 125) subisce delle variazioni solo quando varia il vettore **B**. In questo caso il segno di derivazione rispetto al tempo si può portare sotto il segno di integrale e applicando il teorema di Stokes si ottiene subito

$$rot\ \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\,\mathbf{B}}{\partial t} \qquad \textit{per i mezzi in quiete}\,. \qquad (126)$$

Se, al contrario, il corpo entro il quale si deve calcolare **E** si muove con la velocità **u**, allora, secondo il chiarimento dato a proposito della (124), la variazione temporale del flusso d'induzione va calcolata relativamente ad una superficie *f* che si muove solidalmente con la materia. Secondo il ƒ19, quando l'elemento di superficie df si muove con la velocità **u** si ha in generale:

$$\frac{d}{dt}\int B_n\, df = \int\left(\frac{\partial\,\mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{u}\ div\ \mathbf{B} - rot\,[\mathbf{u}\,\mathbf{B}]\right)_n df \quad .$$

Essendo: div **B** = 0 otteniamo quindi

$$rot\ \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\,\mathbf{B}}{\partial t} - rot\,[\mathbf{u}\,\mathbf{B}]\right) \qquad \textit{per i mezzi in movimento}\ . \qquad (126a)$$

Questa equazione sarà spesso scritta in una forma abbreviata, introducendo quella particolare derivata rispetto al tempo di cui abbiamo parlato nel ƒ19:

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{u}\,div\ \mathbf{A} - rot\,[\mathbf{u}\ \mathbf{A}]. \quad \{5/2\}$$

Allora la (126 a) può anche scriversi:

$$rot\ \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}}\ .$$

Se si applica la (126a) nuovamente al calcolo della f.e.m. indotta in una spira conduttrice, si vede che i due termini del secondo membro corrispondono separatamente alle due possibili cause dell'impulso magnetico: in primo luogo la variazione temporale di **B**, che è la sola causa efficace nel caso che la spira sia in quiete, e in secondo luogo l'effetto del moto della spira, che nel caso di un campo di induzione costante è la sola causa possibile dell'impulso magnetico. **{5/3}** E' facile convincersi che

$$- \, d\mathbf{s} \left[\mathbf{u} \; \mathbf{B}\right] dt = \mathbf{B} \left[\mathbf{u} \; d\mathbf{s}\right] dt$$

è il flusso di induzione che attraversa l'elemento di superficie [**u** dt, d**s**] descritto nel tempo dt dall'elemento d**s** della curva limite.

Conviene inoltre rilevare esplicitamente che le equazioni del campo per i corpi in movimento sono in realtà sensibilmente più complicate dell'equazione (126a), la quale rappresenta soltanto un'approssimazione del tutto sufficiente per le applicazioni tecniche. La forma esatta di tali equazioni, per qualunque valore di u, si può scrivere soltanto con l'ausilio della teoria elettronica o della teoria della relatività."

5.2 FEYNMAN R.P., LIGHTON R.B., SANDS M., La fisica di Feynman, volume II, parte 1, 17-1.

"17-1 La fisica dell'induzione

[...] Abbiamo già definito la fem in un circuito conduttore come la forza complessiva sulle cariche che si accumula su tutta la lunghezza del circuito. Più precisamente, si tratta della componenete tangenziale della forza per unità di carica integrata una volta lungo tutto il circuito. Questa grandezza è perciò uguale al lavoro fatto su una carica unitaria che percorra il circuito una volta.
Abbiamo anche dato la 'regola del flusso', che dice che la fem è uguale alla variazione per unità di tempo del flusso magnetico attraverso il circuito. Vediamo se si può capire perchè le cose stanno così. Per primo consideriamo il caso nel quale il flusso cambia perché il circuito viene fatto muovere in un campo costante.
Nella fig. 17-1 si è indicato un semplice circuito chiuso filiforme le cui dimensioni possono essere fatte variare.

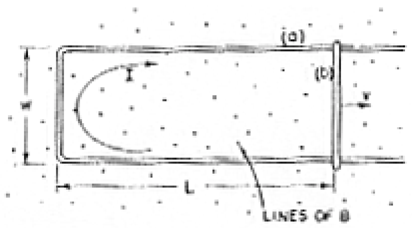

figura 17-1 Feynman

Il circuito si compone di due parti: una parte (a) fatta ad U che resta fissa e una traversa mobile che (b) che può scorrere lungo i bracci della U. Così il circuito resta sempre chiuso, ma la sua area è variabile. Supponiamo di collocare ora il circuito in un campo magnetico uniforme perpendicolare al piano della U. Secondo la regola, quando la traversa viene mossa, viene ad esserci nel circuito una fem proporzionale alla variazione del flusso attraverso il circuito nell'unità di tempo. Questa fem produrrà una corrente nel circuito; supporremo che il filo abbia una resistenza sufficiente perché tale corrente sia piccola: si potrà allora trascurare il campo magnetico di questa corrente.
Il flusso attraverso la spira è wLB, perciò la 'regola del flusso' darebbe per la fem l'espressione

$$\varepsilon = w\ B\ \frac{dL}{dt} = w\ B\ v \ ,$$

dove v è la velocità di traslazione della traversa.
Questo risultato si dovrebbe poter interpretare come effetto della forza magnetica v x B sulle cariche nella traversa in moto. Queste cariche subiranno una forza tangenziale rispetto al filo, eguale a vB per unità di carica. Essa è costante per tutta la lunghezza della traversa ed è nulla altrove, perciò il suo integrale è

$$\varepsilon = w\ v\ B \ ,$$

che ci dà lo stesso risultato ottenuto dalla velocità di variazione del flusso.
Il ragionamento ora fatto si può estendere a qualsiasi caso in cui vi sia un campo magnetico fisso e dei fili che si muovono. Si può provare in generale che per qualunque circuito le cui parti si muovono in un campo magnetico costante, la fem è la derivata temporale del flusso, senza riguardo alla forma del circuito.
D'altra parte, cosa succede se la spira è stazionaria e si varia il campo magnetico ? La risposta a questo problema non possiamo dedurla dal medesimo ragionamento. Fu una scoperta di Faraday - ottenuta all'esperienza - il fatto che la 'regola del flusso' resta valida qualunque sia la ragione del cambiamento del flusso. La forza sulle cariche elettriche è

data con completa generalità dalla legge **F** = q(**E** + **v** x **B**); non ci sono nuove, speciali 'forze dovute a campi magnetici variabili'. Qualsiasi forza su cariche in quiete in un filo stazionario viene dal termine E. **{5/4}** Le osservazioni di Faraday condussero alla scoperta che i campi elettrico e magnetico sono collegati da una nuova legge: in una regione dove il campo magnetico varia con il tempo, si genera un campo elettrico. E' questo campo elettrico che spinge gli elettroni nel filo ed è perciò responsabile della fem in un circuito stazionario quando c'è un flusso magnetico variabile.
La legge generale che regola il campo elettrico associato a un campo magnetico variabile è

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \;, \qquad (17.1)$$

Questa legge la chiameremo legge di Faraday. Fu scoperta da Faraday, ma fu scritta per la prima volta in forma differenziale da Maxwell, come una delle sue equazioni. Vediamo come questa equazione dia la 'regola del flusso' per i circuiti.
Adoperando il teorema di Stokes, questa legge può essere scritta in una forma integrale nel modo seguente

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \bullet d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \bullet \mathbf{n}\, da = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \bullet \mathbf{n}\, da \;, \qquad (17.2)$$

dove, al solito, Γ è una curva chiusa qualunque e S una qualunque superficie che ammette Γ come contorno. Qui, ricordiamo, Γ è una curva *matematica* fissa nello spazio e S una superficie fissa. Allora la derivata rispetto al tempo può essere portata fuori dal segno di integrale e si ha

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \bullet d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \bullet \mathbf{n}\, da = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\textit{flusso attraverso}\, S\right). \qquad (17.3)$$

Applicando questa relazione alla curva , che descrive un circuito conduttore *fisso*, si ritrova la 'regola del flusso'. L'integrale al primo membro è la fem, quello al secondo membro è la diminuzione per unità di tempo del flusso concatenato col circuito. L'equazione (17.1) applicata ad un circuito fisso è quindi equivalente alla 'regola del flusso'.
Perciò la 'regola del flusso' - cioè che la fem in un circuito è uguale alla variazione per unità di tempo del flusso magnetico attraverso il circuito - si applica quando il flusso varia sia perché cambia il campo, sia perché il circuito si muove (o per tutte e due le cose insieme). Le due possibilità: 'il circuito si muove' oppure 'il campo cambia' non vengono distinte nella formulazione della legge. Eppure nella nostra spiegazione della regola abbiamo usato per i due casi due leggi completamente distinte, e cioè la legge **v** x **B** per il caso del circuito che si muove e l'equazione $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ per il caso del campo che cambia.
Non conosciamo nessun altro caso in fisica in cui un principio tanto semplice, preciso e generale esiga per la sua effettiva comprensione un'analisi in termini di *due fenomeni diversi*. Di solito si trova che una magnifica generalizzazione di quel tipo ha per base un unico profondo principio. Ciò nonostante in questo caso non sembra esserci una simile profonda implicazione. Si deve intendere la 'regola' come un effetto congiunto di due fenomeni affatto distinti.

Questa 'regola del flusso' va considerata nel modo seguente. In modo generale, la forza sull'unità di carica è **F**/q = **E** + v x **B**; su fili che si muovono c'è la forza che deriva dal secondo termine; inoltre c'è un campo E se in qualche parte esiste un campo magnetico che cambia. Si tratta di effetti indipendenti, ma la fem in una spira è sempre uguale alla variazione per unità di tempo del flusso magnetico che l'attraversa." [1]

---

[1]. FEYNMAN R.P., La fisica di feynman, volume II, parte 1, 17-3, Inter European Editions, (1975)

5.3 JACKSON J.D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons (1975), pp. 210-213.

"6.1 Faraday's Law of Induction

Le prime osservazioni quantitative riguardanti campi elettrici e magnetici dipendenti dal tempo furono fatte da Faraday (1831), sperimentando sul comportamento delle correnti in circuiti posti in campi magnetici variabili nel tempo. Faraday osservò che una corrente transitoria era indotta in un circuito se: (*a*) la corrente stazionaria che fluisce in un circuito adiacente è attivata o disattivata, (*b*) il circuito adiacente, in cui circola una corrente stazionaria, si muove relativamente al primo circuito, (*c*) un magnete permanente viene immerso in un circuito oppure viene estratto. Non fluisce alcuna corrente se non quando varia la corrente adiacente oppure vi è moto relativo. Faraday interpretò la corrente transitoria come dovuta alla variazione del flusso magnetico collegato al circuito. La variazione del flusso induce un campo elettrico intorno al circuito, il cui integrale di linea è chiamato *forza elettromotrice*, ε. La forza elettromotrice produce un flusso di corrente, in accordo alla legge di Ohm.

Esprimiamo ora le osservazioni di Faraday in termini matematici, quantitativi. Il circuito *C* sia limitato da una superficie aperta *S* con un versore normale **n**, come in figura. Il flusso magnetico collegato al circuito è definito da

$$F = \int_S \mathbf{B} \bullet \mathbf{n} \, d\,a \qquad (6.1)$$

La forza elettromotrice lungo il circuito è

$$\varepsilon = \oint_C \mathbf{E}' \bullet d\mathbf{l} \qquad (6.2)$$

dove **E**' è il campo elettrico sull'elemento d**l** del circuito *C*. Le osservazioni di Faraday sono sintetizzabili nella legge matematica

$$\varepsilon = -\,k\,\frac{d\,F}{d\,t} \qquad (6.3)$$

fig. 6.1

La forza elettromotrice indotta lungo il circuito è proporzionale alla variazione nel tempo del flusso magnetico collegato al circuito. Il segno è definito dalla legge di Lenz, che stabilisce che la corrente indotta (e il flusso magnetico da essa prodotto) fluisce in direzione tale da opporsi alla variazione di flusso lungo il circuito.

La costante di proporzionalità *k* dipende dalla scelta delle unità di misura per i campi elettrici e magnetici. Essa non è, come potrebbe apparire a prima vista, una costante empirica indipendente, da determinarsi sperimentalmente. Come vedremo immediatamente, una volta che si siano scelte le unità e le dimensioni nella legge di Ampère, l'entità e le dimensioni di *k* seguono dall'ipotesi dell'invarianza galileiana per la legge di Faraday. Nelle unità Gaussiane, $k = c^{-1}$, dove *c* è la velocità dela luce.

Prima dello sviluppo della teoria della relatività speciale (e pure dopo, qualora si abbia a che fare con velocità piccole rispetto alla velocità della luce), tutti i fisici comprendevano, sebbene spesso non era affermato esplicitamente, che le leggi fisiche avrebbero dovuto essere invarianti per trasformazioni galileiane. In altre parole, i fenomeni fisici sono gli stessi, qualora osservati da due osservatori in moto relativo con velocità costante **v,** posto che le coordinate spaziali e temporali siano espresse dalle trasformazioni Galileiane, $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}t$, $t' = t$. Consideriamo, in particolare, le osservazioni di Faraday. Ci si attende, ed è sperimentalmente verificato, che la stessa corrente è indotta in un circuito secondario, sia quando *esso* si muova mentre resta stazionario il circuito attraverso cui fluisce la corrente, sia quando esso è mantenuto fisso mentre il circuito primario è mosso in modo corrispondente.

Consideriamo ora la legge di Faraday per un circuito in moto e vediamo le conseguenze dell'invarianza Galileiana.**{5/5}** Esprimendo la (6.3) in termini di integrali su **E**' e **B**, abbiamo

$$\oint_C \mathbf{E}' \bullet d\mathbf{l} = -k \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \bullet \mathbf{n}\, da \qquad (6.4)$$

La forza elettromotrice indotta è proporzionale alla derivata *totale* del flusso rispetto al tempo, potendo il flusso variare sia variando l'induzione magnetica sia variando la forma, o l'orientazione, o la posizione del circuito. La relazione (6.4) è una generalizzazione di vasta portata della legge di Faraday. Il circuito *C* può essere pensato come un qualunque percorso geometrico chiuso nello spazio, non necessariamente coincidente con un circuito elettrico. In questo modo, la (6.4) diventa una relazione tra i campi stessi. E' importante sottolineare, comunque, che il campo elettrico **E**' è il campo elettrico in d**l**, nel sistema di coordinate o mezzo in cui d**l** è in quiete, poiché è quel campo che produce il flusso di corrente qualora il circuito sia effettivamente presente.

Se il circuito *C* è in moto con velocità **v** in qualche direzione, come mostrato in fig. 6.2, la derivata totale rispetto al tempo nella (6.4) deve tenere in considerazione questo moto. Il flusso attraverso il circuito può variare perché (*a*) il flusso varia con il tempo in quel punto, oppure (*b*) la traslazione del circuito varia la posizione dei confini. E' semplice mostrare che il risultato della derivata totale del flusso attraverso il circuito in moto è*

fig. 6.2

-* Per un generale vettore di campo c'è un termine aggiuntivo, $\int_S (\nabla \bullet \mathbf{B})\mathbf{v} \bullet \mathbf{n}\, da$, che fornisce il contributo per le sorgenti del vettore di campo 'spazzate' dal circuito in moto. Il risultato generale si ottiene molto più facilmente utilizzando la derivata convettiva,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \bullet \nabla$$

Così

$$\frac{d\,\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial\,\mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \bullet \nabla)\mathbf{B} = \frac{\partial\,\mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v}(\nabla \bullet \mathbf{B})$$

in cui **v** è trattato, nella differenziazione, come un vettore non variabile. Utilizzando il teorema di Stokes per il secondo membro si ottiene la (6.5).

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \bullet \mathbf{n}\, da = \int_S \frac{\partial\,\mathbf{B}}{\partial t} \bullet \mathbf{n}\, da + \oint_C (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \bullet d\mathbf{l} \qquad (6.5)$$

L'equazione (6.4) può ora essere scritta nella forma

$$\oint_C [\mathbf{E}' - k(\mathbf{B} \times \mathbf{v})] \bullet d\mathbf{l} = -k \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \bullet \mathbf{n}\, da \tag{6.6}$$

Questa è una formulazione equivalente della legge di Faraday applicata al circuito in moto *C*. Ma possiamo anche scegliere di interpretarla in modo differente. Possiamo ipotizzare il circuito *C* e la superficie *S* in una certa posizione istantanea dello spazio, nel labratorio. Applicando la legge di Faraday (6.4) a questo circuito fisso, troviamo

$$\oint_C \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} = -k \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \bullet \mathbf{n}\, da \tag{6.7}$$

dove **E** è ora il campo elettrico nel laboratorio. Assumendo che valga l'invarianza galileiana, si ha che i membri di sinistra della (6.6) e della (6.7) devono essere uguali. Ciò significa che il campo elettrico **E**' nel sistema di coordinate in moto del circuito è

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + k\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{6.8}$$

Per determinare la costante *k* consideriamo semplicemente il significato di **E'**. Una particella carica (per es. uno degli elettroni di conduzione), necessariamente in quiete rispetto al circuito in moto, subirà una forza $q\mathbf{E}'$. Qualora osservata dal laboratorio, la carica rappresenta una corrente $\mathbf{J} = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Dalla legge della forza magnetica (...), è evidente che questa corrente subisce una forza in accordo con (6.8) posto che la costante *k* sia uguale a c^{-1}.

Vediamo così che, con la nostra scelta delle unità per cariche e correnti, la covarianza Galileiana richiede che la citata costante *k* sia uguale alla costante che appare nella definizione del campo magnetico (..). La legge di Faraday (6.5) può quindi scriversi

$$\oint_C \mathbf{E}' \bullet d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \bullet \mathbf{n}\, da \tag{6.9}$$

dove **E**' è il campo elettrico in $d\mathbf{l}$ nel suo sistema di riferimento di quiete. La derivata rispetto al tempo del membro di destra è la derivata *totale* rispetto al tempo della (6.5). Come sottoprodotto abbiamo trovato che il campo eletrico **E**' in un sistema di riferimento in moto con velocità **v** rispetto al laboratorio è **{5/6}**

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{6.10}$$

Poiché abbiamo considerato trasformazioni Galileiane, il risultato (6.10) è una approssimazione valida solo per velocità piccole rispetto alla velocità della luce. (..). Tuttavia, la legge di Faraday non è una approssimazione. Le trasformazioni galileiane sono state usate solo per calcolare la costante *k* in (6.3), un compito per il quale esse erano perfettamente adeguate. La legge di Faraday (6.9) può essere posta in forma differenziale usando il teorema di Stokes, posto che il circuito sia mantenuto in quiete nel sistema di riferimento scelto (in modo da avere **E** e **B** definiti nello *stesso* riferimento). La trasformazione dell'integrale della forza elettromotrice in un integrale di superficie porta a

$$\int_S \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\, \mathbf{B}}{\partial\, t} \right) \bullet \mathbf{n}\; d a = 0$$

Poiché il circuito C e la superficie limitante S sono arbitrarie, l'integrale deve annullarsi su tutti i punti dello spazio.

Così la forma differenziale della legge di Faraday è

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\, \mathbf{B}}{\partial\, t} = 0 \qquad (6.11)$$

Osserviamo che questa è la generalizzazione, dipendente dal tempo, della formula valida per i campi elettrostatici $\nabla \times \mathbf{E} = 0$.

Note al testo

{5/1} Becker osserva come la legge della variazione del flusso magnetico sia una legge simmetrica rispetto alle due possibili configurazioni cinematiche.

{5/2} E' questa la derivata "convettiva" già analizzata da Miller [vedi 4/2.D} Appare molto delicata la relazione tra operazione matematica e operazione fisica.

{5/3} Nasce l'asimmetria quando indaghiamo la causa della forza elettromotrice: nel primo caso risulta una forza elettrica, nel secondo caso risulta una forza magnetica. In un sistema di riferimento appare solo un campo magnetico costante nel tempo, in un altro sistema di riferimento appare anche un campo elettrico, prodotto dalla variazione nel tempo del campo magnetico.

{5/4} Come lo stesso Feynman sottolineerà alla fine del testo, la regola del flusso è una regola simmetrica. Viceversa, la spiegazione in termini di forza agenti sulle particelle cariche è asimmetrica. L'asimmetria, di nuovo, corrisponde al fatto che in un caso la forza è magnetica, nell'altro la forza è elettrica.

{5/5} Questo è il punto più significativo della trattazione di Jackson: l'autore pone in rilievo il principio regolativo della simetria e dell'invarianza. Notiamo la somiglianza tra questo approccio e quello di Lorentz.

{5/6} Jackson ritrova il risultato di Lorentz del 1895. Confrontando la trattazione di Jackson con quella di Becker, notiamo una leggera differenza dal punto di vista matematico:

(a) Becker ridefinisce la variazione temporale del campo magnetico **B**, cioè

$$\frac{d\,\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial\,\mathbf{B}}{\partial t} - rot\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B})\,,$$

(b) Jackson ridefinisce il campo elettrico **E**, cioè

$$\mathbf{E} = \mathbf{E'} - \frac{1}{c}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Con entrambe le ridefinizioni si può scrivere formalmente

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,\dot{\mathbf{B}}$$

SCRAPS

Sul testo di Feynman:

L'equazione dell'induzione in forma differenziale (17.1) sembra asimmetrica, mentre quella in forma integrale (17.3) sembra simmetrica. Mi pare che qui si vada oltre la distinzione di Maxwell (*Trattato*, II°, n° 529) tra rappresentazione in termini di equazioni differenziali e integrali estesi a tutto lo spazio, da una parte, e integrali su dominii finiti, dall'altra. Nella prima rappresentazione, le due sottorappresentazioni (eq. diff. e eq. int.) non sembrano concettualmente equivalenti.